

مسائلی در اعداد مختلط

ردیف	سوالات
۱	فرض کنید z عددی مختلط باشد و $A = (z - \bar{z})(z^2 - \bar{z}^2)(z^3 - \bar{z}^3) \dots (z^n - \bar{z}^n)$. نشان دهید $ A < 2^n z ^{\frac{n(n+1)}{2}}$
۲	معادله $2z^3 + (\bar{z})^3 = 3$ را حل کنید.
۳	ناحیه زیر را در صفحه مختلط رسم کنید: $3 < z - i + z + i < 5$
۴	نشان دهید: $\frac{1 + \sin \theta + i \cos \theta}{1 + \sin \theta - i \cos \theta} = \sin \theta + i \cos \theta$ و سپس با استفاده از آن عبارت زیر را حساب کنید. $\left(1 + \sin \frac{\pi}{5} + i \cos \frac{\pi}{5}\right)^{10} + \left(1 + \sin \frac{\pi}{5} - i \cos \frac{\pi}{5}\right)^{10}$
۵	معادله زیر را حل کنید: $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$
۶	معادله $z^4 = \frac{1 - i}{1 + i\sqrt{3}}$ را حل کنید.
۷	تمام ریشه های معادله $z^4 + 4z^2 + 16 = 0$ را بیابید.
۸	اگر $z = 1 + i$ ریشه معادله $z^7 + az^5 + b = 0$ باشد، a و b را به دست آورید.
۹	ریشه های چهارم عدد مختلط $z = -\sqrt{3} - i$ را حساب کنید.
۱۰	اعداد مختلط z و w مفروض اند و داریم $ z = 1$. نشان دهید: $ 1 - \bar{z}w = z - w $
۱۱	مکان هندسی نقاطی از صفحه مختلط را که در رابطه زیر صدق کند به دست آورید. $\left \frac{z+1}{z-1}\right \leq 2.$
۱۲	معادله زیر را حل کنید: $z^6 - z^5 + z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$
۱۳	اگر z_1, z_2 دو عدد مختلط باشند و $ z_1 - z_2 = z_1 + z_2 $ باشد نشان دهید: $ \text{Arg} z_1 - \text{Arg} z_2 = \frac{\pi}{2}$
۱۴	ریشه های معادله $z^5 + z^3 + z = 0$ را به دست آورید.

$z = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}} \right)^{15}$	۱۵
<p>اگر α, β ریشه های معادله $z^2 - 2z + 4 = 0$ باشند، نشان دهید: $\alpha^n + \beta^n = 2^{n+1} \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$</p>	۱۶
<p>اگر z, w اعداد مختلط باشند به قسمی که $\left \frac{z+\bar{w}}{\bar{z}-w} \right = 1$، نشان دهید که قسمت حقیقی zw برابر صفر است.</p>	۱۷
<p>هر گاه a, c دو عدد حقیقی بوده و b عددی مختلط باشد. نشان دهید که معادله $az\bar{z} + b\bar{z} + \bar{b}z + c = 0$ که در آن $a \neq 0$ و $z = x + iy$ می باشد نمایشگر دایره ای است در صفحه xy.</p>	* ۱۸
<p>فرض کنیم z_1 و z_2 و z_3 سه عدد مختلط باشند به طوری که: $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ ، $z_1 = z_2 = z_3 = 1$ ، ثابت کنید که این سه عدد راس های یک مثلث متساوی الاضلاع می باشند که در دایره به شعاع واحد به مرکز مبدا مختصات محاط شده است.</p>	* ۱۹